

Affine torische Varietäten

Felix Schüller

17. November 2005

Zusammenfassung

Bislang haben wir ein für ein Gitter N und einen *streng* konvexen, rationalen, polyhedral Kegel $\sigma \subset N_{\mathbb{R}}$ die Unterhalbgruppe $S_{\sigma} = \sigma^{\vee} \cap M$ betrachtet. Im folgenden wollen wir zeigen, dass wir zu S_{σ} eine affine Varietät definieren können.

Dabei beschränken wir uns aus bestimmten Gründen, die an geeigneter Stelle genannt werden, auf *streng* konvexe, rationale, polyhedrale Kegel. Im ersten Teil wird zuerst abstrakt eine affine Varietät definiert, und dann gezeigt wie man diese in geeignete Räume einbetten kann.

In Teil 2 und 3 geht es dann um spezielle Eigenschaften der so erhaltenen Varietäten.

Im weiteren sei grundsätzlich N ein $n \in \mathbb{N}$ dimensionales Gitter und M das dazu duale Gitter. Weiter sei $\sigma \subset N_{\mathbb{R}}$ grundsätzlich ein streng konvexer, rationaler, polyhedraler Kegel und $S_{\sigma} := \sigma^{\vee} \cap M$.

1 Halbgruppenalgebren und abstrakte affine torische Varietäten

1.1 Halbgruppenalgebren

Zuerst eine allgemeine Konstruktion. Zu einer Halbgruppe H konstruieren wir ein $\mathbb{C}$ -Algebra $\mathbb{C}[H]$ wie folgt: Als $\mathbb{C}$ -Vektorraum habe $\mathbb{C}[H]$ die (symbolischen) Basisvektoren x^u mit $u \in H$. Auf diesem Vektorraum definieren wir eine Multiplikation mittels $\forall_{u,u' \in H} x^u \cdot x^{u'} = x^{u+u'}$. Wir erhalten so das $\mathbb{C}[H] = \{ \sum_{u \in H} a_u x^u \mid a_u \in \mathbb{C} \text{ fast alle } = 0 \}$ eine kommutative $\mathbb{C}$ -Algebra ist, falls H kommutativ.

Desweiteren sehen wir: x^0 ist das multiplikative neutrale Element in $\mathbb{C}[H]$ und falls u in h invertierbar, so ist x^u invertierbar in $\mathbb{C}[H]$.

Beispiel 1.1: $\mathbb{C}[\mathbb{N}] = \mathbb{C}[x]$ und $\mathbb{C}[\mathbb{N}^n] = \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$ und $\mathbb{C}[\mathbb{Z}^n] = \mathbb{C}[x_1, x_1^{-1}, \dots, x_n, x_n^{-1}]$ der Ring der Laurentreihen in n Variablen.

Wir sehen: ist H eine torsionsfreie endlich erzeugte Halbgruppe (d.h. aus $n \cdot t = n \cdot s$ folgt $n = 0$ oder $s = t$) so können wir $\mathbb{C}[H]$ mit einer (unter-)Algebra von Laurentreihen identifizieren und erhalten so das $\mathbb{C}[H]$ ein nullteilerfreier Ring mit genau einem nilpotenten Element ($0 \in \mathbb{C}[H]$) ist. Somit erhalten wir das $\mathbb{C}[H]$ der Koordinatenring der affinen Varietät $V := \text{specm}(\mathbb{C}[H])$ ist.

Satz 1.1: Voraussetzungen wie oben. Dann gilt: $V \cong \text{Hom}_{sgp}(H, (\mathbb{C}, \cdot))$

Beweis. Seien $u_1, \dots, u_n$ die Erzeuger von H .

$\varphi : \text{Hom}_{\mathbb{C}\text{-Alg}}(\mathbb{C}[H], \mathbb{C}) \rightarrow \text{Hom}_{sgp}(H, (\mathbb{C}, \cdot)); v \mapsto \tilde{v}$ mit $\tilde{v}(u_l) := v(x^{u_l})$ für alle $l \in \{1, \dots, n\}$ und lineare Fortsetzung, ist offenbar ein Isomorphismus ($\varphi^{-1}(v)(g) = g(v(u_1), \dots, v(u_n))$).

Für $v \in \text{Hom}_{\mathbb{C}\text{-Alg}}(\mathbb{C}[H], \mathbb{C})$ und $\tilde{v} \in \text{Hom}_{sgp}(H, (\mathbb{C}, \cdot))$ gilt per Definition $v(x^0) = \tilde{v}(0) = 1$.

Sei $h \in \text{Hom}_{\mathbb{C}\text{-Alg}}(\mathbb{C}[H], \mathbb{C})$ dann ist h per Definition surjektiv, und nach dem Isomorphiesatz ist $\mathbb{C}[H]/\text{Kern}(h) \cong \mathbb{C}$ also ein Körper, und damit

$\text{Kern}(h) \subset \mathbb{C}[H]$ ein maximales Ideal. Also haben wir den Isomorphismus

$\psi : \text{Hom}_{\mathbb{C}\text{-Alg}}(\mathbb{C}[H], \mathbb{C}) \rightarrow V = \text{specm}(\mathbb{C}[H]); h \mapsto \text{Kern}(h)$ ($\psi^{-1}(I) = (\pi : H \rightarrow H/I \cong \mathbb{C})$) das heisst, wir kriegen einen Isomorphismus $\varphi \circ \psi^{-1} : V \rightarrow \text{Hom}_{sgp}(H, (\mathbb{C}, \cdot))$ $\square$

Beispiel 1.2: $\mathbb{C}[\mathbb{Z}/(n)] \cong \mathbb{C}[x]/(x^n - 1)$

⌈ Sei $x^m \in \mathbb{C}[x]/(x^n - 1)$ also $x^m = x^{qn+r} = (x^n)^q x^r = x^r$ $q \in \mathbb{Z}, r \in \mathbb{Z}/(n)$. ⌋

Beispiel 1.3: $\mathbb{C}[2\mathbb{N} + 3\mathbb{N}] \cong \mathbb{C}[x, y]/(x^3 - y^2) \cong NL := \{a_0 + \sum_{l=2}^{\infty} a_l x^l\}$

⌈ $\mathbb{C}[2\mathbb{N} + 3\mathbb{N}] = NL$, denn $2\mathbb{N} + 3\mathbb{N} = \mathbb{N} \setminus \{1\}$ ($2n + 3m > 1$ für m und n ungleich 0 und Darstellbarkeit über Fallunterscheidung über Rest bei Division durch 3)

Betrachte jetzt $\varphi : \mathbb{C}[x, y] \rightarrow NL; (x, y) \mapsto (x^3, x^2)$ offenbar wohldefiniert, surjektiv (s.o.) und $\text{Kern}(\varphi) = (x^3 - y^2)$ Also ergibt sich die Behauptung mit dem Isomorphiesatz. ⌋

1.2 Affine Torische Varietäten

1.2.1 Definition

Definition: Es sei S_σ die zu dem streng konvexen rationalen Kegel σ gehörende Halbgruppe. Wir definieren $A_\sigma := \mathbb{C}[S_\sigma]$ und die zu σ gehörende *affine torische Varietät* als

$$U_\sigma := \text{specm}(\mathbb{C}[S_\sigma]) = \text{specm}(A_\sigma)$$

Beispiel 1.4: Sei $o = \{0\}$, also $o^\vee = M_{\mathbb{R}}$ und damit $S_o = M$. Damit erzeugen $\pm e_1^*, \dots, \pm e_n^*$ M als Halbgruppe, und wir erhalten

$$A_o = \mathbb{C}[M] = \mathbb{C}[x_1, x_1^{-1}, \dots, x_n, x_n^{-1}] \cong \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]_{x_1 \cdots x_n}$$

Die Algebra der Laurentpolynome. Diese ist als Unter algebra von $\mathbb{C}(x_1, \dots, x_n)$ ein nullteilerfreier Ring.

Bemerkung: Wegen $S_\sigma \subset S_o$ fuer jeden streng konvexen rationalen Kegel σ ist A_σ eine Unter algebra von A_o und somit auch ein nullteilerfreier Ring.

Bemerkung: Diese Konstruktion funktioniert fuer jede torsionsfreie endlich erzeugte Halbgruppe.

Zurück zum Beispiel: Da alle Elemente aus S_o invertierbar sind, erhalten wir nach Satz 1.1:

$$U_o = \text{Hom}_{\text{sgp}}(S_o, (\mathbb{C}, \cdot)) = \text{Hom}_{\text{sgp}}(M, \mathbb{C}^*) \cong (\mathbb{C}^*, \cdot)^n$$

Dies gibt Anlaß zu folgender Definition:

Definition: U_o trägt die Struktur eine abelschen Gruppe, die wir als n -dimensionalen *affinen komplexen algebraischen Torus* zu dem Gitter M (oder seinem dualen N) bezeichnen. Daher setzen wir $T_N := N \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C}^* = \text{Hom}_{\text{sgp}}(M, \mathbb{C}^*)$.

1.2.2 Einbettungen

Die Einbettung von A_σ ist jeweils abhängig von der Wahl der Erzeuger von S_σ .

Beispiel 1.5: Wählen wir sie wie oben können wir U_o in den $\mathbb{C}^{2n}$ einbetten. Dazu definieren wir $\varphi : A_o \rightarrow \mathbb{C}[x_1, \dots, x_{2n}]; (x_i, x_i^{-1}) \mapsto (x_{2i-1}, x_{2i})$ und erhalten $U_o \cong V(x_{2i-1}x_{2i} - 1) \subset \mathbb{C}^{2n}$. In Polarkoordinaten geschrieben sehen wir das dies $(S^1)^n \times (\mathbb{R}_{>0})^n$ entspricht.

Wählen wir als Erzeuger von S_o $e_1^*, \dots, e_n^*, -(e_1^* + \dots + e_n^*)$ so erhalten wir $A_o = \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n, (x_1 \cdots x_n)^{-1}]$ und somit $U_o \cong V(x_1 \cdots x_n x_{n+1} - 1) \subset \mathbb{C}^{n+1}$.

Beispiel 1.6: Wir betrachten $\sigma = \text{cone}(e_1, \dots, e_d)$ ($d \leq n$). Die Erzeuger von $\sigma^\vee$ und auch von S_σ sind $e_1^*, \dots, e_d^*, \pm e_{d+1}^*, \dots, \pm e_n^*$. Wir erhalten $A_\sigma = \mathbb{C}[x_1, \dots, x_d, x_{d+1}, x_{d+1}^{-1}, \dots, x_n, x_n^{-1}]$ und $U_\sigma \cong \mathbb{C}^d \times (\mathbb{C}^*, \cdot)^{n-d}$

Hier noch ein Beispiel eines Kegels im $\mathbb{R}^2$:

Beispiel 1.7: Es sei $\sigma = \text{cone}(2e_1 - e_2, e_2)$. Nachrechnen ergibt $\sigma^\vee = \text{cone}(e_1^* + 2e_2^*, e_1^*)$ und S_σ wird von $e_1^* + e_2^*, e_1^* + 2e_2^*, e_1^*$ erzeugt. Also gilt $A_\sigma = \mathbb{C}[x_1, x_1x_2, x_1x_2^2]$. Setzen wir $z_1 := x_1$, $z_2 := x_1x_2$ und $z_3 := x_1x_2^2$, so sehen wir $z_1z_3 - z_2^2 = 0$ also $U_\sigma \cong V(z_1z_3 - z_2^2) \subset \mathbb{C}^3$.

Und im $\mathbb{R}^3$ (Vergleiche ersten Vortrag):

Beispiel 1.8: Es sei $\sigma = \text{cone}(e_1, e_2, e_1 + e_3, e_2 + e_3)$. Nachrechnen ergibt $\sigma^\vee = \text{cone}(e_1^*, e_2^*, e_3^*, e_1^* + e_2^* - e_3^*)$ und S_σ wird von ebenfalls von diesen erzeugt. Also gilt $A_\sigma = \mathbb{C}[x_1, x_2, x_3, x_1 x_2 x_3^{-1}] \cong \mathbb{C}[y_1, y_2, y_3, y_4]/(y_1 y_2 - y_3 y_4)$. Wir erhalten $U_\sigma \cong V(y_1 y_2 - y_3 y_4) \subset \mathbb{C}^4$.

1.2.3 Verallgemeinerung

Jetzt wollen wir die gerade an Beispielen festgestellte Konstruktionsmöglichkeit einer Einbettung Verallgemeinern.

Definition: Für eine Menge von Erzeugern $\{e_1, \dots, e_k\}$ von S_σ definieren wir

$$\text{poslin}(S_\sigma) := \{(a, b) \in \mathbb{R}_{\geq 0}^k \times \mathbb{R}_{\geq 0}^k \mid \sum_{l=1}^k a_l e_l = \sum_{l=1}^k b_l e_l\}$$

als die Menge der positiven linearen Relationen von S_σ bezüglich dieser Erzeuger.

Lemma 1.2: $\text{poslin}(S_\sigma) \cap \mathbb{Z}^{2k}$ ist eine endlich erzeugte Halbgruppe.

Beweis. $K := \mathbb{R}_{\geq 0}^k \times \mathbb{R}_{\geq 0}^k \subset \mathbb{R}^{2k}$ ist offenbar ein konvexer polyedraler Kegel (bezüglich des Gitters $\mathbb{Z}^{2k}$). mit $e := (e_1, \dots, e_k, -e_1, \dots, -e_k) \in (\mathbb{R}^{2k})^*$ gilt $\text{poslin}(S_\sigma) = K \cap H_e$, also ist $\text{poslin}(S_\sigma)$ eine Seite von K und damit nach Vortrag 1 wiederum ein konvexer polyedraler Kegel. Nach Gordons Lemma (Vortrag 1, duale Version) ist $\text{poslin}(S_\sigma) \cap \mathbb{Z}^{2k}$ eine endlich erzeugte Halbgruppe. $\square$

Sei jetzt S_σ erzeugt von $u_1, \dots, u_k$, also $A_\sigma = \mathbb{C}[x^{u_1}, \dots, x^{u_k}]$. Weiter wissen wir das $\text{poslin}(S_\sigma) \cap \mathbb{Z}^{2k}$ endlich erzeugt ist. Jeder Erzeuger von $\text{poslin}(S_\sigma) \cap \mathbb{Z}^{2k}$ ist eine Relation $\sum_{l=1}^k a_l u_l = \sum_{l=1}^k b_l u_l$. Diese überträgt sich auf A_σ als $\prod_{l=1}^k x^{a_l u_l} = \prod_{l=1}^k x^{b_l u_l}$. Betrachten wir jetzt $\varphi : \mathbb{C}[y_1, \dots, y_k] \rightarrow A_\sigma; y_i \mapsto x^{u_i}$ so ist φ surjektiv und offenbar $\text{Kern}(\varphi)$ das von den Relationen $\prod_{l=1}^k y_l^{a_l} - \prod_{l=1}^k y_l^{b_l}$ über alle Erzeuger von $\text{poslin}(S_\sigma) \cap \mathbb{Z}^{2k}$ erzeugte Ideal I_σ .

Wir erhalten:

Satz 1.3: Für jedes σ mit S_σ erzeugt von $u_1, \dots, u_k$ ist $A_\sigma \cong \mathbb{C}[y_1, \dots, y_k]/I_\sigma$.

$\square$

2 Toruswirkungen

Wir haben im vorherigen Abschnitt gesehen dass der n -dimensionale affine komplexe algebraischen Torus T_N isomorph zu $(\mathbb{C}^*, \cdot)^n$ ist, also über eine Gruppenstruktur verfügt. Da ausserdem die Punkte von U_σ und T_N als Halbgruppenmorphisms aufgefasset werden koennen, so dass sich auf natürliche weise eine Gruppenwirkung von T_N auf U_σ ergibt:

Definition: $T : T_N \times U_\sigma \rightarrow U_\sigma; (t(u), x(u)) \mapsto t(u) \cdot x(u)$ ist eine Gruppenwirkung von T_N auf U_σ .

Definition: Es seien $X \subset Y$ Mengen und G eine Gruppe die mittels einer Wirkung w auf Y operiert. Eine Abbildung $f : X \rightarrow Y$ heisst *equivariant bezüglich w* falls für alle $(g, x) \in G \times X$ $f(w(g, x)) = w(g, f(x))$ gilt.

Wir sehen also, für die Einbettung $\iota : U_\sigma = (\mathbb{C}^*, \cdot)^n \rightarrow \mathbb{C}^n$ gilt für $(t, x) \in T_N \times U_\sigma$:

$\iota(T(t, x)) = \iota(t \cdot x) = t \cdot \iota(x) = T(t, \iota(x))$ also ist ι ein bezüglich T equivariante Einbettung von U_σ in den $\mathbb{C}^n$.

Definition: Nach Satz 1.1 gilt $U_\sigma \cong \text{Hom}_{sgp}(S_\sigma, (\mathbb{C}, \cdot))$. Also haben wir zwei besonder Punkte auf U_σ : Die konstante Einsabbildung $x_0 : S_\sigma \rightarrow \mathbb{C}; u \mapsto 1$ und den sogenannten *ausgezeichneten Punkt*

$$x_\sigma : S_\sigma \rightarrow \mathbb{C}; u \mapsto \begin{cases} 1 & -u \in S_\sigma \\ 0 & -u \notin S_\sigma \end{cases}.$$

Lemma 2.1: S_σ erzeugt M als Gruppe (d.h. $S_\sigma + (-S_\sigma) = M$).

Beweis. $-S_\sigma = -(\sigma^\vee \cap M) = (-\sigma^\vee) \cap M = \{u \in \mathbb{R}^{n*} \mid \forall v \in \sigma \langle u, v \rangle \leq 0\}$.

" $\subset$ " klar.

" $\supset$ " Sei $e_i^* \in M = \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(N, \mathbb{Z})$ ein beliebiger Erzeuger. Gilt $e_i^* \in \sigma^\vee$ so bleibt nichts zu zeigen. Gilt dies nicht so gilt $e_i^*(u_j) < 0$ für $j \in I \subset \{1, \dots, n\}$ Erzeuger von σ . Wegen σ streng konvex gilt $\dim(\sigma) = n$ also existiert ein $s \in S_\sigma$ mit $\forall j \in I s(u_j) > 0$. Also existieren $l_j \in \mathbb{N}$ mit $(e_i^* + l_j s)(u_j) \geq 0$, mit $l := \max_{j \in I} l_j$ gilt dann $e_i^* + l_j s = \tilde{s} \in S_\sigma$, also $e_i^* = \tilde{s} - l_j s \in S_\sigma - S_\sigma$ $\square$

Aus diesem Lemma folgt direkt:

Lemma 2.2: Der Einschränkungsmorphismus $T(., x_0) : \text{Hom}(M, \mathbb{C}^*) \rightarrow \text{Hom}_{sgp}(S_\sigma, \mathbb{C}^*)$ ist injektiv.

Beweis. Sei $v \in \text{Hom}_{sgp}(S_\sigma, \mathbb{C}^*)$ dann ist v auch auf $-S_\sigma$ eindeutig bestimmt. Wegen $S_\sigma + (-S_\sigma) = M$ ist aber dann v auch schon auf M eindeutig bestimmt. $\square$

Satz 2.3: Der Orbit von x_0 unter der Wirkung T ($T(., x_0)$) definiert eine bezüglich T equivariante Einbettung von T_N in die affine torische Varietät U_σ .

Beweis. $T(., x_0)$ ist nach dem letzten Lemma injektiv, und das Bild eine Untergruppe von $\text{Hom}_{sgp}(S_\sigma, (\mathbb{C}, \cdot))$, also ist $T(., x_0)$ eine Einbettung. Bleibt zu zeigen dass für alle $(t, x) \in T_N \times U_\sigma$ $T(T(t, x), x_0) = t \cdot x \cdot x_0 = T(T(t, x_0), x)$ was wahr ist, da $(\mathbb{C}^*, \cdot)^n$ abelsch ist. $\square$

Als nächstes wollen wir die betrachten was passiert wenn wir eine Seite τ von σ haben. Aus dem ersten Vortrag wissen wir das $S_\sigma \subset S_\tau = S_\sigma + \mathbb{N}(-u)$ für ein $u \in S_\sigma$. Wir erhalten also einen Einschränkungsmorphismus $\iota : U_\tau = \text{Hom}_{sgp}(S_\tau, (\mathbb{C}, \cdot)) \rightarrow (S_\sigma, (\mathbb{C}, \cdot)) = U_\sigma$

Satz 2.4: Sei τ eine Seite von σ . Dann ist $\iota : U_\tau \rightarrow U_\sigma$ eine bezüglich T equivariante Einbettung, und $U_\tau = (U_\sigma)_{x^u}$ mit $S_\tau = S_\sigma + \mathbb{N}(-u)$, ausserdem gilt $\iota(\underbrace{x_0}_{\in \text{Hom}_{sgp}(S_\tau, (\mathbb{C}, \cdot))}) = x_0 \in \text{Hom}_{sgp}(S_\sigma, (\mathbb{C}, \cdot))$.

Beweis. Das ι eine Einbettung und bezüglich T equivariant ist folgt völlig analog zu den bisherigen Beweisen. Für die letzte Behauptung erinnern wir uns: $V_f := \{a \in V \mid f(a) \neq 0\}$ ist nach dem ersten Vortrag offen in V und eine affine Varietät.

Weiter gilt, das die Relation $S_\tau = S_\sigma + \mathbb{N}(-u)$ sich auf A_τ als $A_\tau = (A_\sigma)_{x^u}$ überträgt. Da U_σ irreduzibel ist (A_σ ist nullteilerfrei) folgt die Behauptung mit dem ersten Vortrag.

Der letzte Teil des Satzes gilt da x_0 jeweils die konstante Einsabbildung ist. □

3 Weitere Eigenschaften affiner torischer Varietäten

3.1 Normalität von $\mathbb{C}[S]$

Definition: Eine Unterhalbgruppe S des Gitters L heisst *saturiert* falls für alle $(k, u) \in \mathbb{N}^+ \times L$ gilt $u \in S \Leftrightarrow ku \in S$.

Satz 3.1: Die endlich erzeugten saturierten M erzeugenden Unterhalbgruppen S von M sind genau die Unterhalbgruppen von der Form $S = S_\sigma$ für einen eindeutigen streng konvexen rationalen polyhedralen Kegel σ .

Beweis. Das S_σ saturiert ist folgt direkt aus der Definition $S_\sigma = \sigma^\vee \cap M$ und der Tatsache das $\sigma^\vee$ ein konvexer Kegel im $\mathbb{R}^{n*}$ ist (vgl. Vortrag 1). ($ku \in \sigma^\vee \Rightarrow u = \frac{1}{k}ku \in \sigma^\vee$)

Sei jetzt also S eine endlich erzeugte saturierte M erzeugenden Unterhalbgruppe von M und $u_1^*, \dots, u_k^*$ ihre Erzeuger.

Wir definieren $C := \text{cone}(\{u_1^*, \dots, u_k^*\})$ und $\sigma := \{u \in \mathbb{R}^n \mid \forall v \in C \langle v, u \rangle \geq 0\}$, dann ist $\sigma^\vee = C$, nach Vortrag 1 (Dualitätstheorem) also ein konvexer rationaler polyhedraler Kegel. Nach Definition gilt $S \subset S_\sigma$. Bleibt also die andere Inklusion zu zeigen.

Sind $\pm e_1^*, \dots, \pm e_n^*$ die Erzeuger von M , so gilt $\forall_{i \in \{1, \dots, k\}} u_i^* = \sum_{l=1}^n a_{il} e_l^*$ mit $a_{il} \in \mathbb{Z}$. Angenommen es gibt ein $u \in S_\sigma \setminus S$ d.h. $u \in \sigma^\vee \cap M$ und $u \notin S$

Also $u = \sum_{l=1}^k x_l u_l^* = \sum_{l=1}^n b_l e_l^*$ mit $x_l \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ und $b_l \in \mathbb{Z}$.

$$\begin{aligned} \sum_{l=1}^k x_l u_l^* &= \sum_{l=1}^k x_l \sum_{j=1}^n a_{lj} e_j^* \\ &= \sum_{l=1}^k \sum_{j=1}^n x_l a_{lj} e_j^* \\ &= \sum_{j=1}^n e_j^* \sum_{l=1}^k x_l a_{lj} \\ &= \sum_{j=1}^n b_j e_j^* \end{aligned}$$

also ist $\forall_{j \in \{1, \dots, n\}} \sum_{l=1}^k x_l a_{lj} = b_j \in \mathbb{Z}$

Also haben wir ein LGS $A^T x = b$ mit $A \in \mathbb{Q}^{k \times n}$ und $b \in \mathbb{Q}^n$. Diesen LGS hat nach Voraussetzung eine Lösung über $\mathbb{R}^k$, also $\text{Rang}(A^T) = \text{Rang}(A^T | b)$, und da der Rang einer Matrix sich nicht ändert wenn man (bei $\text{Char} = 0$) zu einem Oberkörper übergeht, gibt es also auch eine Lösung in $\mathbb{Q}^k$. Da $\mathbb{Q}^k$ dicht in $\mathbb{R}^k$ liegt müssen wir auch schon eine Lösung $q \in (\mathbb{Q}_{\geq 0})^k$ haben.

Sei jetzt $d \in \mathbb{N}$ das Produkt der Zähler von q . Dann ist $\sum_{l=1}^k q_l u_l^* \notin S$ aber $d \cdot \sum_{l=1}^k q_l u_l^* = \sum_{l=1}^k \underbrace{d \cdot q_l}_{\in \mathbb{N}} u_l^* \in S \not\Leftarrow$ zur Saturiertheit von S .

Da $S \mid M$ erzeugt ist σ offenbar (gleiche Argumentation wie oben) auch streng konvex. $\square$

Als nächstes wollen wir untersuchen wann $\mathbb{C}[S]$ normal (d.h. nullteilerfrei und ganz abgeschlossen) ist. Dazu zunächst ein paar Lemmas.

Lemma 3.2: Ist R ein normaler Ring mit Quotientenkörper K , so ist für $0 \neq s \in R$

$$R_s := \left\{ \frac{r}{s^n} \in K \mid r \in R, n \in \mathbb{N} \right\}$$

(die Lokalisierung von R in s) auch wieder normal.

Beweis. Ist $f \in R_s[x]$ so existiert ein $n \in \mathbb{N}$ so das $s^n f \in R[x]$ ist. somit überträgt sich die Normalität von R direkt auf R_s . $\square$

Bemerkung: Insbesondere ist für einen algebraisch abgeschlossenen Körper K $K[x_1, x_1^{-1}, \dots, x_n, x_n^{-1}] \cong K[x_1, \dots, x_n]_{x_1 \dots x_n}$ normal.

Erinnerung:

Lemma 3.3: Der Schnitt von normalen Ringen ist wieder normal.

Satz 3.4: Eine endlich erzeugte Unterhalbgruppen S von M ist genau dann saturiert wenn $\mathbb{C}[S]$ normal ist.

Beweis. Wir können annehmen das $S \mid M$ erzeugt (anderfalls gehe zu $M = S + (-S)$ über).

Sei $\mathbb{C}[S]$ normal und $(k, u) \in \mathbb{N}^+ \times M$ mit $ku \in M$. Dann ist x^u Nullstelle von $X^k - x^{ku} \in \mathbb{C}[S][X]$, also ganz über $\mathbb{C}[S]$ und somit $x^u \in \mathbb{C}[S] \Rightarrow u \in S$. Also ist S saturiert.

Sei jetzt S saturiert. Nach Satz 3.1 gilt $S = S_\sigma$. Da wie oben bemerkt $\mathbb{C}[M] = \mathbb{C}[x_1, x_1^{-1}, \dots, x_n, x_n^{-1}]$ normal ist können wir uns auf $S_\sigma \neq M$ beschränken. Dann gilt $\sigma^\vee \neq M_{\mathbb{R}}$. Nach Farkas Satz (angewandt auf das duale) gilt dann

$$\sigma^\vee = \bigcap_i H_{v_i}^+$$

für geeignete $v_i \in \sigma$. mit $\rho_i := \mathbb{R}_{\geq 0} v_i$ gilt dann

$$A_\sigma = \bigcap_i A_{\rho_i}$$

die A_{ρ_i} sind aber nach Beispiel 1.6 von der Form $\mathbb{C}[x_1, x_2, x_2^{-1}, \dots, x_n, x_n^{-1}] \cong \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]_{x_2 \dots x_n}$, also nach oben normal, und damit auch der Schnitt A_σ . $\square$

3.2 Produktbildung

Haben wir zwei affine Varietäten $V \subset \mathbb{C}^n$ und $W \subset \mathbb{C}^m$ mit Koordinatenringen R und S so wissen wir dass $V \times W \subset \mathbb{C}^{n+m}$ wieder eine affine Varietät ist. Mit geeigneter Definition des Tensorproduktes, und nach Einführen der Multiplikation $(r \otimes s) \cdot (\tilde{r} \otimes \tilde{s}) = r\tilde{r} \otimes s\tilde{s}$ sieht man dass $V \times W$ den Koordinatenring $R \otimes_{\mathbb{C}} S$ hat.

Haben wir jetzt zwei Gitter N_1, N_2 in $(N_1)_{\mathbb{R}}$ beziehungsweise $(N_2)_{\mathbb{R}}$ so ist sicherlich $N := N_1 \oplus N_2$ ein Gitter in $(N_1)_{\mathbb{R}} \times (N_2)_{\mathbb{R}}$. Sein Duales ist $M \cong M_1 \oplus M_2$.

Sei für $j \in \{1, 2\}$ $S_j \subset N_j$ und $\sigma_j := \text{cone}(S_j)$ (σ_j streng konvex). Dann ist $S := (S_1 \times \{0\}) \cup (\{0\} \times S_2) \subset N$ (O.b.d.A. $0 \in N_j$) und damit $\sigma := \text{cone}(S) = \sigma_1 \times \sigma_2$. Weiterhin gilt offenbar $S_{\sigma} \cong S_{\sigma_1} \oplus S_{\sigma_2}$ und (vergleiche oben) $A_{\sigma} \cong A_{\sigma_1} \otimes_{\mathbb{C}} A_{\sigma_2}$, sowie $U_{\sigma} \cong U_{\sigma_1} \times U_{\sigma_2}$.

Wir haben gerade bewiesen:

Satz 3.5: Sind für $j \in \{1, 2\}$ N_j Gitter in $(N_j)_{\mathbb{R}}$ und $\sigma_j \subset (N_j)_{\mathbb{R}}$ streng konvexe rationale polyhedrale Kegel, so ist dies auch $\sigma := \sigma_1 \times \sigma_2 \subset (N_1 \oplus N_2)_{\mathbb{R}}$ und es gilt $U_{\sigma} \cong U_{\sigma_1} \times U_{\sigma_2}$.

□

3.3 Morphismen

Erinnerung: Morphismen zwischen affinen Varietäten $V \subset \mathbb{C}^n, W \subset \mathbb{C}^m$ sind Einschränkungen von polynomiellen Abbildungen $F : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^m$ mit $F(V) \subset W$ auf V . Sei $f : V \rightarrow W$ so ein Morphismus, dann induziert f einen Morphismus $f^* : \mathbb{C}[W] \rightarrow \mathbb{C}[V]$. Haben wir andererseits einen Morphismus $\varphi : \mathbb{C}[W] \rightarrow \mathbb{C}[V]$, so können wir, indem wir ihn zu einem Morphismus $\Phi : \mathbb{C}[x_1, \dots, x_m] \rightarrow \mathbb{C}[y_1, \dots, y_n]$ mittels $\Phi \equiv 0$ auf $I(W)$ fortsetzen. Mittels $F : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^m; F(p) = (\Phi(x_1)(p), \dots, \Phi(x_m)(p))$ erhalten wir $F(V) \subset W$

⌈ Es sei g in $I(W)$ dann gilt:

$$0 = \Phi(g(x_1, \dots, x_m))(y_1, \dots, y_n) = g(\Phi(x_1), \dots, \Phi(x_m))(y_1, \dots, y_n) = g(F(y_1, \dots, y_n)) \quad \rfloor$$

Ausserdem gilt mit $f := F|_V$: $f^* = \varphi$

⌈ Sei g in $\mathbb{C}[W]$: $f^*(g) = g(f) = g(\Phi(x_1), \dots, \Phi(x_m)) = \Phi(g) = \varphi(g) \quad \rfloor$

Also gilt:

Satz 3.6: Für zwei affine Varietäten gibt es eine bijektive Abbildung zwischen der Menge ihrer Morphismen, und den Morphismen ihrer Koordinatenalgebren.

□

Für zwei streng konvexe polyhedrale Kegel $\sigma, \tilde{\sigma}$ haben wir in der Menge der Morphismen $A_{\sigma} \rightarrow A_{\tilde{\sigma}}$ eine ausgezeichnete Teilmenge, nämlich die Morphismen die von einem Morphismus $S_{\sigma} \rightarrow S_{\tilde{\sigma}}$ induziert werden.

Beispiel 3.1: Ist $\sigma \subset \tilde{\sigma} \subset N_{\mathbb{R}}$ so gilt $S_{\tilde{\sigma}} \subset S_{\sigma}$ und wir erhalten ein Inklusionsabbildung $\iota : S_{\tilde{\sigma}} \rightarrow S_{\sigma}$ was wiederum die Abbildung $a : A_{\tilde{\sigma}} \rightarrow A_{\sigma}$ liefert, welcher zu einen T -equivarianten Morphismus $\Phi : U_{\sigma} \rightarrow U_{\tilde{\sigma}}$ führt.

┐ Zur Equivarianz:

Es gilt $a : A_{\tilde{\sigma}} \rightarrow A_{\sigma}; x^u \mapsto x^{\iota(u)}$ Dies ergibt

$$\Phi : U_{\sigma} \cong \text{Hom}_{\mathbb{C}\text{-Alg}}(A_{\sigma}, (\mathbb{C}, \cdot)) \rightarrow U_{\tilde{\sigma}} \cong \text{Hom}_{\mathbb{C}\text{-Alg}}(A_{\tilde{\sigma}}, (\mathbb{C}, \cdot)); \varphi \mapsto \varphi \circ a$$

Mit der in Satz 1.1 gefundenen Abbildung $U_{\sigma} \cong \text{Hom}_{sgp}(S_{\sigma}, (\mathbb{C}, \cdot))$ beziehungsweise $U_{\tilde{\sigma}} \cong \text{Hom}_{sgp}(S_{\tilde{\sigma}}, (\mathbb{C}, \cdot))$ entspricht Φ :

$$\tilde{\Phi} : \text{Hom}_{sgp}(S_{\sigma}, (\mathbb{C}, \cdot)) \rightarrow \text{Hom}_{sgp}(S_{\tilde{\sigma}}, (\mathbb{C}, \cdot)); v \mapsto v \circ \iota$$

Wir haben zu zeigen: $\tilde{\Phi}(T(t, x)) = T(t, \tilde{\Phi}(x))$ für alle $t \in U_{\sigma}$ und $x \in \text{Hom}_{sgp}(S_{\sigma}, (\mathbb{C}, \cdot))$
Sei also t, x wie oben und $u \in S_{\tilde{\sigma}}$ beliebig aber fest. Dann gilt:

$$\begin{aligned} \tilde{\Phi}(T(t, x))(u) &= \tilde{\Phi}(t \cdot x)(u) \\ &= t(\iota(u)) \cdot x(\iota(u)) \\ &= t(u) \cdot x(\iota(u)) \\ &= t(u) \cdot \tilde{\Phi}(x)(u) \\ &= T(t, \tilde{\Phi}(x))(u) \end{aligned}$$

└

Beispiel 3.2: $\sigma = \text{cone}(e_1, e_2) \subset \mathbb{R}^2$ und $\tau = \text{cone}(e_1 + e_2)$. S_{σ} wird Erzeugt von e_1^*, e_2^* und S_{τ} von $e_1^*, -e_1^* + e_2^*, e_1^* - e_2^*$. Also gilt $A_{\sigma} = \mathbb{C}[x_1, x_2]$ und $A_{\tau} = \mathbb{C}[x_1, x_1^{-1}x_2, x_1x_2^{-1}] \cong \mathbb{C}[y_1, y_2, y_3]/(y_2y_3 - 1)$. Daraus folgt $U_{\sigma} = \mathbb{C}^2$ und $U_{\tau} = \underbrace{V(y_2y_3 - 1)}_{\subset \mathbb{C}^3} \cong \mathbb{C} \times \mathbb{C}^*$.

Wir haben $\iota : S_{\sigma} \rightarrow S_{\tau}$ also gilt nach Beispiel 3.1:

$$\tilde{\Phi} : \text{Hom}_{sgp}(S_{\tau}, (\mathbb{C}, \cdot)) \rightarrow \text{Hom}_{sgp}(S_{\sigma}, (\mathbb{C}, \cdot)); v \mapsto v \circ \iota$$

Es gilt $\tilde{\Phi}(x_{\tau}) = x_{\tau} \circ \iota = \begin{cases} 1 & u = 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$ den $\text{Bild}(A_{\tau}) = \text{cone}(e_1^*, e_2^*)$. Nach dem obigen Beispiel gilt aber für $t \in T_N$ $\tilde{\Phi}(T(t, x_{\tau})) = T(t, \tilde{\Phi}(x_{\tau})) = \begin{cases} t(u) \cdot 1 = 1 & u = 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$ Also ist $\tilde{\Phi}$ wegen $\#T(\cdot, x_{\tau}) > 1$ nicht injektiv.

Folgendes kann man mit Mittel aus dem fünften Vortrag zeigen:

Satz 3.7: Ist der von der Inklusion $\iota : \tau \rightarrow \sigma$ stammende Morphismus $U_{\tau} \rightarrow U_{\sigma}$ eine offene Einbettung, so ist τ eine Seite von σ .

Bislang hatten wir immer ein festes Gitter und ineinander enthaltende Kegel. Im folgenden wollen wir die allgemeine Situation untersuchen:

Wir setzen zwei Gitter $N, \tilde{N}$ und einen Homomorphismus $\varphi : \tilde{N} \rightarrow N$ sowie σ und $\tilde{\sigma}$ zwei streng konvexe polyhedrale Kegel in diesen Gittern so dass $\varphi(\tilde{N} \cap \tilde{\sigma}) \subset \sigma$ gilt, voraus. Der duale Gitterhomomorphismus $\varphi^\vee : M \rightarrow \tilde{M}$ induziert dann einen Halbgruppenmorphismus $S_\sigma \rightarrow S_{\tilde{\sigma}}$ welcher wiederum einen Algebramorphismus $A_\sigma \rightarrow A_{\tilde{\sigma}}$ und dann einen Morphismus $U_{(\tilde{N}, \tilde{\sigma})} \rightarrow U_{(N, \sigma)}$ induziert.

Satz 3.8: Es seien $U_{(N, \sigma)}$ und $U_{(\tilde{N}, \tilde{\sigma})}$ affine torische Varietäten. Dann liefert ein Gitterhomomorphismus $\varphi : \tilde{N} \rightarrow N$ mit $\varphi(\tilde{N} \cap \tilde{\sigma}) \subset \sigma$ einen Morphismus $\varphi^\vee : M \rightarrow \tilde{M}$, welcher über einen Morphismus $\varphi^\vee|_{S_\sigma} : S_\sigma \rightarrow S_{\tilde{\sigma}}$ einen Morphismus $U_{(\tilde{N}, \tilde{\sigma})} \rightarrow U_{(N, \sigma)}$ induziert, der equivariant bezüglich des induzierten Homomorphismus $T^* : T_{\tilde{N}} \rightarrow T_N$ ist.

Beweis. Die Existenz haben wir schon gezeigt, bleibt die Equivarianz zu zeigen.

Völlig analog zu Beispiel 3.1 erhalten wir

$$\tilde{\Phi} : \text{Hom}_{\text{sgp}}(S_{\tilde{\sigma}}, (\mathbb{C}, \cdot)) \rightarrow \text{Hom}_{\text{sgp}}(S_\sigma, (\mathbb{C}, \cdot)); v \mapsto v \circ \varphi^\vee$$

Also für $t \in T_N$, $x \in \text{Hom}_{\text{sgp}}(S_{\tilde{\sigma}}, (\mathbb{C}, \cdot))$ und $u \in S_\sigma$ beliebig aber fest:

$$\begin{aligned} \tilde{\Phi}(T_{T_N}(t, x))(u) &= \tilde{\Phi}(t \cdot x)(u) \\ &= t(\varphi^\vee(u)) \cdot x(\varphi^\vee(u)) \\ &= (T^*(t) \cdot \tilde{\Phi}(x))(u) \\ &= T_{T_N}(t, \tilde{\Phi}(x))(u) \end{aligned}$$

□

Gitterwechsel Als letztes wollen wir uns anschauen was passiert wenn wir zwei Gitter $\tilde{N} \subset N$ haben, wobei $\tilde{N}$ ein Untergitter von endlichen Index ist. Dann gilt $\tilde{N}_{\mathbb{R}} = N_{\mathbb{R}}$. Als erstes wollen wir untersuchen wie $\Phi : T_{\tilde{N}} \rightarrow T_N$ aussieht.

Hierzu brauchen wir folgenden Satz aus Algebra:

Satz 3.9: Sei $A \subset \mathbb{Z}^n$ eine Untergruppe von endlichen Index, so gibt es ein Erzeugendensystem $u_1, \dots, u_n$ von $\mathbb{Z}^n$ so dass $d_1, \dots, d_n \in \mathbb{Z}$ existieren mit $d_1 u_1, \dots, d_n u_n$ erzeugen A .

Wir können $N = \mathbb{Z}^n$ annehmen. Sei also $u_1, \dots, u_n$ ein solches Erzeugendensystem von $\mathbb{Z}^n$ mit $d_1, \dots, d_n \in \mathbb{Z}$ wie in obigen Satz. Dann wird M von $u_1^*, \dots, u_n^*$, und $\tilde{M}$ offenbar von $\frac{u_1^*}{d_1}, \dots, \frac{u_n^*}{d_n}$ erzeugt.

Aus der Inklusion $\iota : \tilde{N} \rightarrow N$ erhalten wir die Inklusion $\iota^\vee : M = S_\sigma \rightarrow \tilde{M} = S_{\tilde{\sigma}}; u_i^* \mapsto d_i \frac{u_i^*}{d_i}$ ($i \in \{1, \dots, n\}$). Hierraus erhalten wir, völlig analog zu Beispiel 3.1:

$$\Phi : T_{\tilde{N}} \cong \text{Hom}_{\mathbb{C}\text{-Alg}}(A_{(\tilde{N}, \sigma)}, (\mathbb{C}, \cdot)) \rightarrow T_N \cong \text{Hom}_{\mathbb{C}\text{-Alg}}(A_{(N, \sigma)}, (\mathbb{C}, \cdot)); \tilde{v} \mapsto \tilde{v} \circ \iota^\vee$$

Sei jetzt $v \in T_N$ mit $v(u_i^*) = c_i \in \mathbb{C}$ ($i \in \{1, \dots, n\}$) dann gilt für $\tilde{v} \in T_{\tilde{N}}$ mit $\tilde{v}(\frac{u_i^*}{d_i}) = (c_i)^{\frac{1}{d_i}}$ (Wobei $(c_i)^{\frac{1}{d_i}}$ eine beliebige Lösung der Gleichung $x^{d_i} = c_i$ ist) $\Phi(\tilde{v}) = v$, also ist Φ surjektiv.

Ist $\tilde{v} \in \text{Kern}(\Phi)$, so gilt $\forall_{i \in \{1, \dots, n\}} 1 = \tilde{v}(u_i^*) = \tilde{v}(d_i \frac{u_i^*}{d_i}) = \tilde{v}(\frac{u_i^*}{d_i})^{d_i}$ also ist für alle $i \in \{1, \dots, n\}$ $\tilde{v}(\frac{u_i^*}{d_i})$ eine d_i -te Einheitswurzel, also ist $\text{Kern}(\Phi) \cong \mathbb{Z}/(d_1) \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}/(d_n) = N/\tilde{N}$.

Zum Abschluss, ohne Beweis (ein Spezialfall wird in Vortrag 5 bewiesen):

Satz 3.10: Haben wir zwei Gitter $\tilde{N} \subset N$ wie oben, so gilt $\tilde{N}_{\mathbb{R}} = N_{\mathbb{R}}$ und ein Kegel $\tilde{\sigma} \subset N_{\mathbb{R}}$ über $\tilde{N}$ ist genau dann streng konvex und polyhedral bezüglich $\tilde{N}$ wenn der entsprechende Kegel σ bezüglich N dies auch ist. In diesem Fall kann U_{σ} mit dem Quotienten von $U_{\tilde{\sigma}}$ unter der von der Wirkung von $T_{\tilde{N}}$ auf $U_{\tilde{\sigma}}$ induzierten Wirkung (Einschränkung) von $N/\tilde{N}$ auf $U_{\tilde{\sigma}}$ auf natürliche Weise identifizieren.