Felix Schüller

1 Knoten und Knotentypen

1.1 Einleitung

Definition. Sei $K \subset \mathbb{R}^3$. K heisst Knoten, falls eine Homöomorphismus $h : S^1 \to K$ existiert.

Es stellt sich die Frage wann man sinnvoll von gleichen Knoten sprechen kann. Da alle Knoten per Definiton homöomorph zu S^1 sind, sind sie es auch untereinander, also scheidet dies als Definition aus. Also betrachten wir die Knoten mitsamt ihrer Einbettung in den $\mathbb{R}^3$. Wir wollen das zwei Knoten genau dann gleich sind wenn man sie ohne ein Durchtrennen ineinander überführen kann, dies führt zu folgender Definition:

Definition. Seien K_1, K_2 Knoten, K_1 und K_2 sind äquivalent, wenn es einen Homöomorphismus $h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ gibt mit $h(K_1) = K_2$

Bemerkung. *Dies ist eine Äquivalenzrelation.*

Die alle Knoten aus der Äquivalenzklasse von S^1 werden auch als *triviale Knoten* bezeichnet.

1.2 Wilde und zahme Knoten

Definition. Ein Knoten heisst *polygonal* wenn er aus endlich vielen Geradensegmenten (genannt Kanten) deren Endpunkte gerade die Ecken des Knotens sind, besteht.

Definition. Ein Knoten heisst *zahm* wenn er äquivalent zu einen polygonalen Knoten ist, andernfalls heisst er *wild.*

Die Unterscheidung zwischen wilden und zahmen Knoten ist wichtig. Der grösste Teil der Theorie in diesem Seminar gilt nur für zahme Knoten. Die Berechnung der wichtigsten invarianten von Knoten, die elementaren Ideale und die Knotenpolynome erfolgt über polygonalen Repräsentanten, diese sind also für wilde Knoten nicht notwendigerweise definiert.

Als nächstes stellt sich die Frage welche Knoten zahm sind, und welche wild. Der folgende Satz zeigt uns eine Klasse von zahmen Knoten ist.

Satz 1. *Sei K ein Knoten mit Bogenlänge l und $\mathfrak{p} : [0, l] \to \mathbb{R}^3$ eine Parametriesierung von K über die Bogenlänge. Ist $\mathfrak{p} \in C^1$ so ist k zahm.*

Der Beweis dieses Satzes ist nicht schwierig, aber recht technisch, und man verliert schnell den Überblick was eigentlich gezeigt wird. Deshalb hier die Idee des Beweises.

Wir zeigen das wir K so in n Segmente der Länge $\frac{l}{n}$ zerlegen können, dass wir einen Winkel α_0 wählen können so das wir n Doppelkegel C_i (mit Eckpunkten $\mathfrak{p}(s_i)$, $\mathfrak{p}(s_{i+1})$) mit folgenden Eigenschaften konstruieren können:

- Die Achse von C_i ist das Geradensegment zwischen $\mathfrak{p}(s_i)$ und $\mathfrak{p}(s_{i+1})$.
- Der Winkel zwischen Achse und Kegeloberfläche ist α_0.
- $\Rightarrow$Aufeinanderfolgende Doppelkegel schneiden sich nur an der gemeinsamen Spitze. (Lemma 4)
- $\Rightarrow$Für jeden Kreisschnitt D eines jeden Doppelkegels C_i existiert genau ein $s \in [s_i, s_{i+1}]$ mit $\mathfrak{p}(s) \in D$. (Lemma 6)
- $\Rightarrow$Nicht aufeinanderfolgende Doppelkegel sind disjunkt. (Lemma 7)

Anschliessend überführen wir für jeden C_i $K \cap C_i$ homöomorph in die Mittellinie von C_i, wobei ∂C_i konstant bleibt.

Zum Bewies benötigen wir folgende Lemmata: (Gelten ab jetzt immer die Voraussetzungen wie im Satz.)

Erinnerung: $p_1, p_2 \in I\!R^3$. $\sphericalangle(p_1, p_2) := \arccos(\frac{\langle p_1, p_2 \rangle}{||p_1|| \cdot ||p_2||})$
$s, \widetilde{s} \in [0, l]$ $L(s, \widetilde{s}) := \int\limits_s^{\widetilde{s}} ||\mathfrak{p}'(\xi)||\, d\xi$.

Bemerkung. $\forall_{s \in [0,l]} ||\mathfrak{p}'(s)|| = 1$

⌜ Sei P die Stammfunktion von $||\mathfrak{p}'(s)||$ (diese existiert nach Ana2). $s = \int\limits_0^s ||\mathfrak{p}'(\xi)||\, d\xi \Rightarrow$
$s = P(s) - P(0) \Rightarrow 1 = P'(s) = ||\mathfrak{p}'(s)||$ ⌟

Beobachtung: Seien $s_0, s_1, s_2 \in [0, l]$ mit $s_0 \leq s_1 < s_2$, dann gilt:
(1) $\mathfrak{p}(s_2) - \mathfrak{p}(s_1) = (s_2 - s_1)(\mathfrak{p}'(s_0) + Q)$ mit $Q := \frac{1}{s_2 - s_1} \int\limits_{s_1}^{s_2} \mathfrak{p}'(u) - \mathfrak{p}'(s_0)\, du$

⌜ $\mathfrak{p}(s_2) - \mathfrak{p}(s_1) = \int\limits_{s_1}^{s_2} \mathfrak{p}'(u) = \int\limits_{s_1}^{s_2} \mathfrak{p}'(s_0)\, du + \int\limits_{s_1}^{s_2} \mathfrak{p}'(u) - \mathfrak{p}'(s_0)\, du$ ⌟

(2) $||\mathfrak{p}(s_2) - \mathfrak{p}(s_1)|| = (s_2 - s_1)(1 + q)$ für ein q mit $|q| \leq ||Q||$

⌜ Mittels $||\mathfrak{p}'(s_0)|| = 1$ und der Dreiecksungleichung folgt:

$$|1 - ||Q||| \leq ||\mathfrak{p}'(s_0) + Q|| \leq 1 + ||Q||$$

Also $||\mathfrak{p}'(s_0) + Q|| = (1 + q)$ mit einem q wie oben, der rest folgt aus (1). ⌟

(3) $\frac{\mathfrak{p}(s_2) - \mathfrak{p}(s_1)}{||\mathfrak{p}(s_2) - \mathfrak{p}(s_1)||} = \mathfrak{p}'(s_0) + P$ mit $P := \frac{Q - q\mathfrak{p}'(s_0)}{1 + q}$

⌜ Folgt durch division vom (1) durch (2). ⌟

(4) Für jedes ε mit $0 < \varepsilon \le \frac{1}{2}$ existiert ein $\delta > 0$ s.d. aus $s_2 - s_0 < \delta$ $|q| \le ||Q|| \le \varepsilon$ folgt.

⌜ $\mathfrak{p}'$ ist stetig auf kompaktem Definitionsbereich, also auch gleichmässig stetig. d.h. zu geg. ε existiert ein $\delta > 0$ s.d. für $s, \widetilde{s} \in [0, l]$ aus $|s - \widetilde{s}| < \delta$ bereits $||\mathfrak{p}(s) - \mathfrak{p}(\widetilde{s})|| < \varepsilon$ folgt. Also gilt für $s_2 - s_0 < \delta$:

$$||Q|| = \frac{1}{s_2 - s_1} || \int_{s_1}^{s_2} \mathfrak{p}'(u) - \mathfrak{p}'(s_0)\, du || \le \frac{1}{s_2 - s_1} \int_{s_1}^{s_2} \underbrace{||\mathfrak{p}'(u) - \mathfrak{p}'(s_0)||}_{<\varepsilon} du \le \varepsilon$$

⌟

(5) weiter gilt: $||P|| \le 2||Q - q\mathfrak{p}'(s_0)|| \le 2(||Q|| + |q|) \le 4\varepsilon$

⌜$q \ge -\varepsilon \ge -\frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{1+q} \le 2$ und (3)⌟

(6) $\lim\limits_{s_1 \to s_2} \frac{||\mathfrak{p}(s_2) - \mathfrak{p}(s_1)||}{L(s_1, s_2)} = 1.$

⌜Nach (2) und def von L gilt: $\frac{||\mathfrak{p}(s_2) - \mathfrak{p}(s_1)||}{L(s_1, s_2)} = \frac{s_1 - s_2}{s_1 - s_2}(1 + q)$ mit (4) gilt $\lim\limits_{s_1 \to s_2} q = 0$, also gilt die Beh.⌟

Lemma 2. *Für alle $\alpha > 0$ existiert ein $\delta > 0$ so das für $s, \widetilde{s}, u, \widetilde{u} \in I \subset [0, l]$ $|I| = \delta$, $s < \widetilde{s}$ und $u < \widetilde{u}$ gilt:*

$$\sphericalangle(\mathfrak{p}(\widetilde{s}) - \mathfrak{p}(s), \mathfrak{p}(\widetilde{u}) - \mathfrak{p}(u)) < \alpha$$

Beweis. Wähle $s < \widetilde{s}$ und $u < \widetilde{u}$ aus $[0, l]$ erst einmal beliebig und definiere $s_0 = \min\{s, \widetilde{s}, u, \widetilde{u}\}$ Dann gilt nach (3):

$$\frac{\mathfrak{p}(\widetilde{s}) - \mathfrak{p}(s)}{||\mathfrak{p}(\widetilde{s}) - \mathfrak{p}(s)||} = \mathfrak{p}'(s_0) + P \quad \text{und} \quad \frac{\mathfrak{p}(\widetilde{u}) - \mathfrak{p}(u)}{||\mathfrak{p}(\widetilde{u}) - \mathfrak{p}(u)||} = \mathfrak{p}'(s_0) + \widetilde{P}$$

Wobei nach (5) für jedes $0 < \varepsilon \le \frac{1}{2}$ ein $\delta > 0$ finden könne das für $s, \widetilde{s}, u, \widetilde{u} \in I \subset [0, l]$ $|I| = \delta$ gilt:

$$||P|| \le 4\varepsilon \quad \text{und} \quad ||\widetilde{P}|| \le 4\varepsilon$$

Also gilt:

$$\begin{aligned}
\left| \frac{\langle\, \mathfrak{p}(\widetilde{s}) - \mathfrak{p}(s) \,,\, \mathfrak{p}(\widetilde{u}) - \mathfrak{p}(u) \,\rangle}{||\mathfrak{p}(\widetilde{s}) - \mathfrak{p}(s)|| \, ||\mathfrak{p}(\widetilde{u}) - \mathfrak{p}(u)||} \right| &= \left| \langle\, \frac{\mathfrak{p}(\widetilde{s}) - \mathfrak{p}(s)}{||\mathfrak{p}(\widetilde{s}) - \mathfrak{p}(s)||} \,,\, \frac{\mathfrak{p}(\widetilde{u}) - \mathfrak{p}(u)}{||\mathfrak{p}(\widetilde{u}) - \mathfrak{p}(u)||} \,\rangle \right| \\
&= |\langle\, \mathfrak{p}'(s_0) + P \,,\, \mathfrak{p}'(s_0) + \widetilde{P} \,\rangle| \\
&= |\underbrace{\langle\, \mathfrak{p}'(s_0) \,,\, \mathfrak{p}'(s_0) \,\rangle}_{=||\mathfrak{p}'(s_0)||=1} + \langle\, \mathfrak{p}'(s_0) \,,\, P \,\rangle + \langle\, \mathfrak{p}'(s_0) \,,\, \widetilde{P} \,\rangle + \langle\, P \,,\, \widetilde{P} \,\rangle| \\
&\overset{\text{C.S. + }\Delta\text{ ungl.}}{\le} 1 + ||P|| + ||\widetilde{P}|| + ||P|| \, ||\widetilde{P}|| \\
&\le 1 + 8\varepsilon + 16\varepsilon^2
\end{aligned}$$

Also kann ein $\delta > 0$ gefunden werden so das $\cos(\sphericalangle(\mathfrak{p}(\widetilde{s}) - \mathfrak{p}(s), \mathfrak{p}(\widetilde{u}) - \mathfrak{p}(u)))$ unter den o.g. Bedingungen beliebig nahe an 1 ist, also folgt die Behauptung. □

Definition. Für $p, \widetilde{p} \in K$, $p = \mathfrak{p}(s)$, $\widetilde{p} = \mathfrak{p}(\widetilde{s})$ sei $\mathrm{arc}(p, \widetilde{p}) = \min\{L(s, \widetilde{s}), L(\widetilde{s}, s)\}$.
(Für $|s - \widetilde{s}| \leq \frac{l}{2}$ gilt dann $\mathrm{arc}(\mathfrak{p}(s), \mathfrak{p}(\widetilde{s})) = |s - \widetilde{s}|$)

Lemma 3. *Für alle $p, \widetilde{p} \in K$ gilt $||p - \widetilde{p}|| \geq m \,\mathrm{arc}(p, \widetilde{p})$, für ein $m > 0$.*

Beweis. Definiere $f : K \times K \to \mathbb{R}; (p, \widetilde{p}) \mapsto \begin{cases} \frac{||p-\widetilde{p}||}{\mathrm{arc}(p,\widetilde{p})} & p \neq \widetilde{p} \\ 1 & p = \widetilde{p} \end{cases}$. Nach (6) ist f stetig, und da der Definitionsbereich kompakt ist, existiert als das minimum m von f und die Behauptung ist gezeigt. □

Nach diesen Hilfmittel zum eigentlichen Beweis:
Wir wählen $0 < \alpha_0 < \frac{\pi}{4}$ so das $\tan(\alpha_0) < \frac{m}{2}$. Zu diesem α_0 wählen wir ein δ nach Lemma 2. Weiter seien $n \in \mathbb{N}$ so das $\frac{l}{n} < \frac{\delta}{2}$ und $(s_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ so das $s_{i+1} - s_i = \frac{l}{n}$. Wir bemerken: $\mathfrak{p}(s_i) = \mathfrak{p}(s_j) \Leftrightarrow i \equiv_n j$, also $\#\{\mathfrak{p}(s_i)\}_{i \in \mathbb{Z}} = n$. Zu jedem s_i bilden wir einen gefüllten Doppelkegel C_i wie folgt:

- Die Achse von C_i ist das Geradensegment zwischen $\mathfrak{p}(s_i)$ und $\mathfrak{p}(s_{i+1})$.
- Der Winkel zwischen Achse und Kegeloberfläche ist α_0.

Lemma 4. *Aufeinanderfolgende Doppelkegel schneiden sich nur an der gemeinsamen Spitze.*

Beweis. Wegen $s_{i+2} - s_i = (s_{i+2} - s_{i+1}) + (s_{i+1} - s_i) < \delta$ ist der Winkel zwischen den Achsen kleiner als $\alpha_0 < \frac{\pi}{4}$ (Lemma 2) welches gerade der Winkel zwischen Achse und Kegeloberfläche ist. Also ist der Schnitt nur die gemeinsamme Spitze. □

Lemma 5. *Aus $s_i \leq s \leq s_{i+1}$ folgt $\mathfrak{p}(s) \in C_i$.*

Beweis. Es gilt $s_{i+1} - s_i < \delta$, nach Lemma 2 also:

$$\sphericalangle(\mathfrak{p}(s) - \mathfrak{p}(s_i), \mathfrak{p}(s_{i+1}) - \mathfrak{p}(s_i)) < \alpha_0$$
$$\sphericalangle(\mathfrak{p}(s_{i+1}) - \mathfrak{p}(s), \mathfrak{p}(s_{i+1}) - \mathfrak{p}(s_i)) < \alpha_0$$

□

Lemma 6. *Für jeden Kreisschnitt D eines jeden Doppelkegels C_i existiert genau ein $s \in [s_i, s_{i+1}]$ mit $\mathfrak{p}(s) \in D$.*

Beweis. Die Existens folgt aus dem Lemma 5 und der Stetigkeit von $\mathfrak{p}$. Angenommen es gäbe $s_i \leq s < \widetilde{s} \leq s_{i+1}$ mit $\mathfrak{p}(s), \mathfrak{p}(\widetilde{s}) \in D$. Dann ist $\frac{\pi 1}{2} = \sphericalangle(\mathfrak{p}(\widetilde{s}) - \mathfrak{p}(s), \mathfrak{p}(s_{i+1}) - \mathfrak{p}(s_i)) < \alpha_0 < \frac{\pi}{4}$ ↯. □

Lemma 7. *Nicht aufeinanderfolgende Doppelkegel sind disjunkt.*

Beweis. Angenommen es existieren C_i und C_j ($C_i \neq C_j$ und nicht aufeinanderfolgend) mit $p \in C_i \cap C_j$ Sei $\mathfrak{p}(s)$ der Punkt mit $s_i \leq s \leq s_{i+1}$ auf dem Kreisschnitt von C_i der p enthält. Dann gilt (vgl. zeichnung): $||\mathfrak{p}(s) - p|| \leq \frac{l}{n} \tan(\alpha_0)$. Analog definiere $\mathfrak{p}(\widetilde{s})$ in C_j.

Da C_i und C_j nicht aufeinanderfolgend sind gilt: $\frac{l}{n} \leq \mathrm{arc}(\mathfrak{p}(s), \mathfrak{p}(\widetilde{s}))$, also:

$$||\mathfrak{p}(s) - \mathfrak{p}(\widetilde{s})|| \leq ||\mathfrak{p}(s) - p|| + ||p - \mathfrak{p}(\widetilde{s})|| \leq 2\,\mathrm{arc}(\mathfrak{p}(s), \mathfrak{p}(\widetilde{s}))\tan(\alpha_0) < m\,\mathrm{arc}(\mathfrak{p}(s), \mathfrak{p}(\widetilde{s})) \quad ↯$$

□

Damit ist die Hauptarbeit erledigt, es bleibt die existens einen Homöomorphismuses zu zeigen, welcher einen offenen Doppelkegel so deformiert das die Spur des Knotens auf die Achse abbildet, und alle Punkte ausserhalb festbleiben. (Also insbesondere der Rand)

Wir nehmen einen Kreisschnitt D eines Doppelkegels C_i und nennen den Mittelpunkt p_0. Für jeden inneren Punkt $p \in D$ definieren wir $g_{D,p} : D \to D$ so, das jede Gerade von p nach $q \in \partial D$ auf die gerade p_0 nach q abgebildet wird so das $g_{D,p}(p) = p_0$ und $g_{D,p}(q) = q$. Dann ist $g_{D,p}$ ein Homöomorphismus mit $g_{D,p}|_{\partial D} = id$.

Ausserdem ist $g_{D,.} : D \times D \to D; (p, \widetilde{p}) \mapsto g_{D,p}(\widetilde{p})$ stetig. Für einen beliebigen Punkt $p(s)$ definieren wir jetzt D_s als den Kreisschnitt eines Doppelkegels C_i der $\mathfrak{p}(s)$ enthält. dann ist

$$h_i : C_i \to C_i; p \mapsto g_{D_s,\mathfrak{p}(s)}(p)$$

Der gesuchte Homöomorphismus, und es ergibt sich:

$$h : I\!R^3 \to I\!R^3; p \mapsto \begin{cases} p & p \notin \bigcup_i C_i \\ h_i(p) & p \in C_i \end{cases}$$

Damit ist Satz 1 bewiesen.

Bemerkung. *Die Doppelkegel C_i konnen beliebig klein gewählt werden, d.h. zu jenem beliebigen $\varepsilon > 0$ es einen Homöomorphismus $I\!R^3 \to I\!R^3$ so das $h(K)$ polygonal ist, und $\forall_{p \in I\!R^3} ||h(p) - p)|| < \varepsilon$. Dies nennt man ε-*äquivalent.

1.2.1 Wilde Knoten

Ein Beispiel für einen wilden Knoten ist z.b. dieser [Bild].

Zu beweisen das ein Knoten wild ist ist i.d.R. schwieriger als der Beweis das er zahm ist. In diesem Fall brauchen wir zum Beweis die Fundamentalgruppe $\pi_1(X, p)$ die erst im nächsten Vortrag präzise eingeführt wird, aber von Prof Geiges in der Vorlesung schon soweit eingeführt wurde wie wir sie hier brauchen.

Um die Wildheit des Knotens K zu zeigen, brauchen wir weiterhin die Definiton von zahm und wild auch für Wege $W : [0, ||W||] \to I\!R^3$, Diese ist analog zu der für Knoten.

Im Folgenden entwickeln wir eine notwendige Bedingung für zahmheit an die Fudamentalgruppe $\pi_1(I\!R^3 \backslash W, p)$ eines Weges W, und zeigen das diese für einen Bogen der Teilmenge von K ist nicht erfüllt wird.

Lemma 8. *Sei o ein Endpunkt eines zahmen Weges W und (V_n) eine folge von Umgebungen von o s. d. $V_1 \supset V_2 \supset ...$ und $\cap_{n=1}^{\infty} V_n = o$. Dann existiert ein N und ein $p \in V_N$ so das der induzierte Homomorphismus $\pi_1(V_N \backslash W, p) \to \pi_1(V_1 \backslash W, p)$ trivial ist.*

Beweis. Da W zahm ist lässt er sich homöomorph so verformen das der Polygonzug der o enthält so auf einen Abschnitt L der positiven x-Achse abgebildet wird das $o = 0$ gilt. Desweiteren gib es ein ε so das $D_\varepsilon(0) \subset V_1$ und $D_\varepsilon(0) \cap W \subset L$ gilt. Wegen $\cap_{n=1}^{\infty} V_n = \{o\}$ gibt es ein N so dass $V_N \subset D_\varepsilon(0)$ ist. Wir wählen $p \in V_N \backslash W$. Dann haben wir eine Sequenz von Injektionen $\pi_1(V_N\backslash W,p) \xrightarrow{\varphi} \pi_1(D_\varepsilon(0)\backslash W,p) \xrightarrow{\psi} \pi_1(V_1\backslash W,p)$, also gilt $\pi_1(V_N\backslash W,p) \xrightarrow{\varphi\circ\psi} \pi_1(V_1\backslash W,p)$. Es gilt aber $\pi_1(D_\varepsilon(0)\backslash W,p) = 0$, also ist φ trivial und damit auch $\varphi \circ \psi$. □

Ein wilder Knoten
Wir benennen die Kanten des Knotens wie folgt in der Grafik, wobei a_n, b_n, c_n eine Kurve von einen hoch über dem Knoten gelegenen Basispunkt ist welcher die Kante in Orientierung gesehen zuerst links und dann rechts passiert. Es ergeben sich folgende Relationen ($n \geq 0$):

$$
\begin{aligned}
(1_n) \quad a_0 &= c_n b_n^{-1} a_n \\
(2_n) \quad a_{n+1} &= b_{n+1} c_n b_{n+1}^{-1} \\
(3_n) \quad b_n &= b_{n+1}^{-1} a_n b_{n+1} \\
(4_n) \quad c_{n+1} &= c_n b_n^{-1} b_{n+1} b_n c_n^{-1}
\end{aligned}
$$

Dann folgt aus (1_0) $b_0 = c_0$, woraus mittels (4_n) wiederum induktiv $b_n = c_n$ folgt, welches wiederum mittels (1_n) $a_n = a_0$ impliziert. Zuletzt impliziert dann (3_n) $a_n = b_{n+1} b_n b_{n+1}^{-1}$, also wird die Gruppe von den b_n unter beachtung der Relation $b_1 b_0 b_1^{-1} = b_2 b_1 b_2^{-1} = b_3 b_2 b_3^{-1} = ...$ erzeugt.

Wir konstruieren jetzt eine absteigende Folge von Teilmengen wie in der Grafik. Dann ist für jedes V_N und geeignetes p die Injektion $\varphi : \pi_1(V_N, p) \to \pi_1(V_1, p)$ nicht trivial da für $n \geq N$ $\varphi(b_n) = b_n$ gilt. Also muss der Knoten wild sein.

1.3 Knotenprojektionen

Knoten werden üblicherweise über Projektionen z.b. der parallelen Projektion
($\mathscr{P} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3; (x,y,z) \mapsto (x,y,0)$) spezifiziert.

Definition. Sei K ein Knoten, P eine Projektion, dann heist $p \in P(K)$ *mehrfacher Punkt von K* der Ordnung $n > 1$ wenn $\#(P^{-1}(p) \cap K) = n$.

Im Allgemeinen ist die Projektion eines Knotens nicht frei von solchen Punkten. Es ist aber möglich das der Knoten äquivalent zu einem Knoten mit einem "einfachen" Bild ist. Wir definieren zuerst was wir unter "einfach" verstehen:

Definition. Ein polygonaler Knoten K ist in *regulärer Position* wenn für sein Bild unter der parallelen Projektion $\mathscr{P}$ folgendes gilt:

1. K hat nur endlich viele mehrfache Punkte, und alle haben die Ordnung 2.
2. Kein mehrfacher Punkt von K ist Bild einer Ecke von K.

Definition. Sei $p \in \mathscr{P}(K)$ ein doppelter Punkt und $p_1, p_2 \in K$ die Urbilder. Der Punkt p_i mit der grösseren z-komponente heist ein *Überkreuzung* der andere *Unterkreuzung*.

Satz 9. *Ein polygonaler Knoten lässt sich durch eine beliebig kleine Rotation des $\mathbb{R}^3$ in eine reguläre Position bringen.*

1.3.1 Der projektive Raum

Für den Beweis des obigen Satzen benötigen wir den dreidimensionalen rellen projektiven Raum $\mathbb{R}P^3$. Auf $\mathbb{R}^4\backslash\{0\}$ definieren wir eine Äquivalenzrelation $\sim$ wie folgt:

$$\forall_{v,w\in\mathbb{R}^4\backslash\{0\}}(v \sim w \Leftrightarrow \exists_{\lambda\in\mathbb{R}^*} v = \lambda w)$$

Durch betrachten der letzten Komponente erhalten wir zwei Typen von Repräsentanten der Äquivalenzklassen: $(x, y, z, 1)$ und $(x, y, z, 0)$, und die Abbildung: $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}P^3; (x, y, z) \mapsto (x, y, z, 1)$ ist eine Einbettung des $\mathbb{R}^3$ in den $\mathbb{R}P^3$.

Weiter gilt das wir jeder Geraden im $\mathbb{R}^3$ einen Punkt $(x, y, z, 0) \in \mathbb{R}P^3$ zuordnen können, in dem sie sich mit jeder zu ihr parallelen Gerade schneidet.

⌜Seien $a+tr$ und $b+t\lambda r$ zwei beliebige parallele Geraden im R^3, die Einbettung φ liefert:

$$\lim_{t\to\infty}(a_1 + tr_1, a_2 + tr_2, a_3 + tr_3, 1) = \lim_{\substack{t\to 0\\ t\neq 0}}(a_1 + \frac{r_1}{t}, a_2 + \frac{r_2}{t}, a_3 + \frac{r_3}{t}, 1)$$

$$= \lim_{\substack{t\to 0\\ t\neq 0}}(ta_1 + r_1, ta_2 + r_2, ta_3 + r_3, t) = (r_1, r_2, r_3, 0)$$

$$\lim_{t\to\infty}(b_1 + t\lambda r_1, b_2 + t\lambda r_2, b_3 + t\lambda r_3, 1) = \lim_{\substack{t\to 0\\ t\neq 0}}(b_1 + \frac{\lambda r_1}{t}, b_2 + \frac{\lambda r_2}{t}, b_3 + \frac{\lambda r_3}{t}, 1) =$$

$$\lim_{\substack{t\to 0\\ t\neq 0}}(ta_1 + \lambda r_1, ta_2 + \lambda r_2, ta_3 + \lambda r_3, t) = \lambda(r_1, r_2, r_3, 0) = (r_1, r_2, r_3, 0)$$

⌟

Deshalb versteht man $\mathbb{R}P^3$ auch als den $\mathbb{R}^3$ (über die Einbettung φ) und der "Ebene in Unendlich", welche wiederum zu $\mathbb{R}P^2$ welcher analog definiert wird isomorph ist. $((x, y, z, 0))$.

Beweis. (Satz 9) Die Idee des Beweises ist K fest zuhalten, und seine Projektionen in alle möglichen Richtungen zu betrachten. Da zu jeder Projektion ein Schar paralleler Geraden gehört, können wir nach obigen Bemerkungen jede Projektion mit dem eindeutigen Schnittpunkt dieser Geraden identifizieren, dies gibt uns eine Bijektion aus der Menge der Projektionen in die "Ebene in Unendlich". Wir betrachten jetzt die Menge

$$Q := \{q \in \mathbb{R}P^2 \mid K \text{ ist bzgl. der zu } q \text{ gehörenden Projektion nicht in regulärer Position}\},$$

und zeigen das Q keinen inneren Punkt haben kann. Wenn wir dies gezeigt haben, wissen wir das wir mit einer minimalen Drehung in eine geeignete Richtung den Knoten in eine regulärer Position bringen können.

Wir betrachten zuerst die Menge aller Ecken von K. Für jede Ecken E von K liegen alle Geraden die E mit einer beliebigen Gerade von K verbinden auf einer Ebene. Diese schneidet $\mathbb{R}P^2$ in einem Geradensegment. Also ist die Menge

$$Q_2 := \{q \in \mathbb{R}P^2 \mid \text{bzgl. der zu } q \text{ gehörenden Projektion ist (ii) nicht erfüllt}\}$$

die Vereinigung von endlich vielen Geradensegmenten, und hat damit keinen inneren Punkt.

Jetzt betrachten wir alle Geraden in $I\!R^3$ in denen ein Geradensegment von K enthalten ist. Drei paarweise verschiedenen beliebigen dieser Geraden haben $0-3$ Schnittpunkte. Im Fall drei Schnittpunkt liegen alle drei Geraden auf einer Ebene, also liegen auch mindenstens eine Gerade die zu Projektionen mit mehrfachen Punkten mit Ordnung 3 gehören auf dieser Ebene. Für den Fall 2 Schnittpunkte ergibt sich auch maximal eine Ebene, für einen Schnittpunkt ebenfalls. Diese Objekte schneiden $I\!RP^2$ in Geradensegmenten.

Bei keinen Schnittpunkt sind entweder zwei Geraden parallel, dann ergibt sich wieder maximal eine Ebene. Oder die Geraden sind paarweise Windschief, Dann liegen diese Geraden auf eine Quadrik, d.h. einer Nullstellenmenge eines quadratischen Polynoms aus $I\!R[x,y,z]$. Diese Menge hat die Eigenschaft, das wenn eine Gerade mit 3 Punkt auf ihr liegt, schon die ganze Gerade in der Quadrik enthalten ist, d.h. zu allen Projektioen mit dreifachen Punkten ist eine Gerade auf der Quadrik enthalten. Die Quadrik schneident $I\!RP^2$ in einen maximal eindimensionalen Objekt.

⌜Betrachte die allgemeine Form einer Quadrik: $Q = \{(x,y,z) \in I\!R^3 \,|\, ax^2 + by^2 + cz^2 + dyz + ezx + fxy + gx + hy + iz = j$ mit $a, ..., j \in I\!R$ fest. Dann gilt für eine Gerade $g = v + \lambda w \, v, w \in I\!R^3$, $\lambda \in I\!R$, dass wenn drei Punkte der Geraden schon auf der Quadrik liegen schon die ganze Gerade auf ihr liegt. (Einsetzen in die Gleichung ergibt eine quadratische Gleichung in λ, diese hat nur zwei Lösungen, also muss es bei drei Lösungen schon eine Konstante gewesen sein.)

Es ergeben sich also 3 mal 3 Punkte die auf der Quadrik liegen müssen. Dies ergibt ein 9×9 LGS. Ist die zugehörige Matix invertierbar, so nehmen wir $j = 1$, und erhalten eine nichttriviale Lösung. Ist die Matrix nicht invertierbar, so gibt es für $j = 0$ eine nichttriviale Lösung. Diese Lösung definiert uns eine Quadrik die nicht der ganze $I\!R^3$ ist, auf der je drei Punkte einer Geraden liegen, also schon die ganze Gerade.

Eine Quadrik ist eine $2-$dim. Untermfg. daraus ergibt sich die Dimension des Schnittes.
⌟

Also hat auch die Menge

$$Q_1 := \{q \in I\!RP^2 \,|\, \text{bzgl. der zu } q \text{ gehörenden Projektion ist (i) nicht erfüllt}\}$$

keine Inneren Punkte, also auch $Q = Q_1 \cup Q_2$. □

1.4 Isotopietypen, amphichirale und umkehrbare Knoten

Unsere bisherige Definition der Äquivalenz zweier Knoten ging von einem Homöomorphismus, also eine sprunghaften Umformung der Knoten aus. Wir wollen uns nun eine stetige umformung zwischen zwei Knoten anschauen. Die entspricht anschaulich dem Verbiegen.

Definition. Eine *isotope Umformung* eines Topologischen Raums X ist eine stetige Abbildung $H : [0,1] \times X; (t,p) \mapsto H(t,p)$, so das für alle $t \in [0,1]$ $H(t,.)$ ein Homöomorphismus ist, und $H(0,.) \equiv id$.

Dies liefert uns wieder eine Äquivalenzrelation auf der Menge der Knoten. Wir sagen zwei Knoten K_1, K_2 gehören zur selben Isotopietyp, wenn es eine Isotopie H des $I\!R^3$ gibt mit $H(1, K_1) = K_2$.

Bemerkung. *h aus dem Beweis von Satz 1 kann als Isotopie von $I\!R^3$ geschrieben werden:*

$$g_{D,p,t} = g_{D,t(p-p_0)+p_0}$$

d.h. differenzierbare Knoten sind haben den gleichen Isotopietyp wie mindestens ein polygonaler Knoten.

Wenn zwei Knoten zum selben Isotopietyp gehören sind sie auch Äquivalent im bisherigen Sinne, die Umkehrung gilt aber nicht. Um dies zu sehen betrachten wir Homöomorphismen von $I\!R^3$. $I\!R^3$ ist orientierbar, und es gibt genau zwei Orientierungen. Betrachten wir jetzt einen Homöomorphismus $I\!R^3 \to I\!R^3$ und die Orientierung von $h(I\!R^3)$ bzgl. der von $I\!R^3$, diese ist entweder gleich oder entgegengesetzt. Die Hintereinanderausführung von zwei Homöomorphismen ist genau dann nicht Orientierungserhaltend wenn ein Homöomorphismen Orientierungserhaltend und der andere nicht ist.

Für eine Isotopie gilt $H(0,.) = id$ und diese ist orientierungserhaltend, also drängt sich der Verdacht auf, dass aufgrund der Stetigkeit in t auch $H(t,.)$ orientierungserhaltend ist. Wenn $H(t,.)$ für alle $t \in [0,1]$ sogar ein Diffeomorphismus und die Jacobische stetig in t ist, sieht man dies auch mittels der Determinate der Jacobischen, da diese genau bei orientierungserhaltend Diffeomorphismen Positiv ist. Man kann dies mit Homologietheorie auch für Homöomorphismen zeigen. Also sind Knoten die Aufgrund einer orientierungsumkehrenden Abbildung Äquivalent sind nicht vom gleichen Isotopietyp.

Definition. Sei K ein Knoten, K heisst *Amphichiral*, falls es einen Orientierungsumkehrenden Homöomorphismus $h : I\!R^3 \to I\!R^3$ mit $h(K) = K$ gibt.

Das *Spiegelbild* von K ist das Bild von K unter der Abbildung $\mathscr{R} : I\!R^3 \to I\!R^3; (x,y,z) \mapsto (x,y,-z)$.

Satz 10. *Ein Knoten K ist genau dann Amphichiral wenn ein orientierungserhaltender Homöomorphismus von $I\!R^3$ existiert der K auf sein Spiegelbild abbildet.*

Beweis. Wenn K Amphichiral ist und h der dazugehörige Homöomorphismus, dann ist $\mathscr{R} \circ h$ Orientierungserhaltend und bildet K auf sein Spiegelbild ab.
Wenn andererseits h eine orientierungserhaltender Homöomorphismus ist, der K auf sein Spiegelbild abbildet, dann ist $\mathscr{R} \circ h$ Orientierungsumkehrend und $\mathscr{R} \circ h(K) = K$. ☐

Es ist einfach zu zeigen das der figure-eight knoten Amphichiral ist.

Der Kleeblattknoten hingegen ist nicht Amphichiral, um dies zu beweisen Fehlen uns allerdings noch die Mittel. Wenn wir dies aber einmal as gegeben voraussetzen erhalten wir folgende Situation:

Der Kleeblattknoten ist Äquivalent zu seinem Spiegelbild, aber nicht in der selben Isotopieklasse. Es stellt sich die Frage ob dies nur bei nicht amphichiralen Knoten möglich ist, also ob jeder orientierungserhaltende Homöomorphismus also Isotopie realisiert werden kann. Die Frage ist nicht einfach zu beantworten, aber die Antwort lautet ja.

Zum Abschluss noch eine Definition. Wir untersuchen wie sich die Orientierung eines Knotens unter einem Homöomorphismus des $\mathbb{R}^3$ verhält.

Definition. Ein Knoten K heist *Umkehrbar* wen es einen orientierungserhaltenden Homöomorphismus h des $\mathbb{R}^3$ gibt, so das $h|_K$ ein orientierungsumkehrender Homöomorphismus $K \to K$ ist.

Sowohl der figure-eight als auch der Kleeblattknoten sind umkehrbar, z.b. durch Rotation um π.

1.5 Quellen

- R. H. Crowell and R. H. Fox, Introduction to Knot Theory, Springer, 1977, Chapter I + Appendix I
- R. H. Fox and E. Artin, Some wild cells and spheres in three-dimensional space, Annals of Mathematics Vol. 49 pp 979-990 (1948)
- R. H. Fox, A remarkebale simple closed curve, Annals of Mathematics Vol. 50 pp 264-265 (1948)